Kreativität trifft Technik und MAINFRAME Hackspace Oldenburg

präsentieren

Fourier-Analyse bis Arduino

Von:
Stoffi

6. November 2012

Inhaltsverzeichnis

Komplexe Zahlen

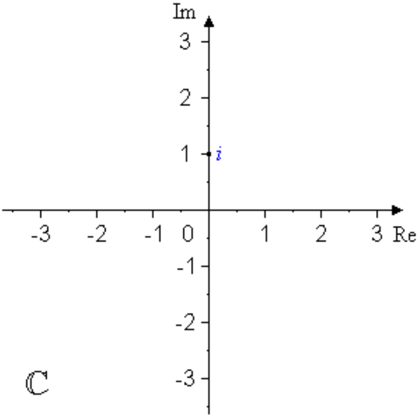
Fourierreihe

Fourier-Transformation

Diskrete Fourier-Transformation

Komplexe Zahlen

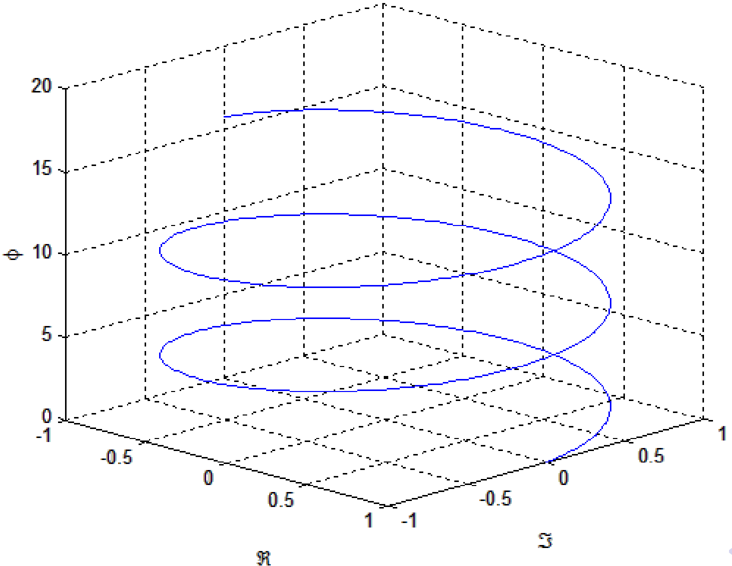
- Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$
- Zahlenstrahl $\rightarrow$ Zahlenebene
- relle Einheit 1
- imaginäre Einheit i
- $i^2 = -1$



Komplexe Zahlen

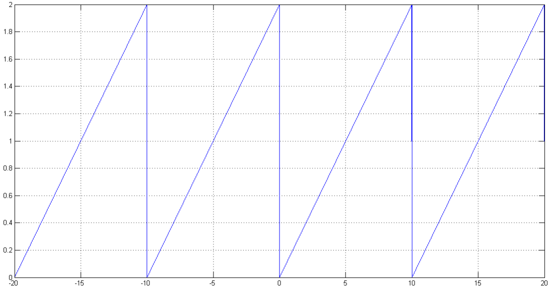
- Komplexe Exponentialfunktion (e-Funktion)

$$e^{i \cdot \Phi} = \cos(\Phi) + i \sin(\Phi) \qquad \text{mit } \Phi \in \mathbb{R}$$



Fourierreihe

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische, (abschnittsweise) stetig differenzierbare Funktion



$$f(x) = \frac{1}{5}(x \bmod 10)$$
$$T = 10$$

- Ziel: f in Sinus- und Kosiunsfunktionen zu zerlegen um Frequenzverhalten zu entschlüsseln

Fourierreihe

- f hat eine Kreisfrequenz ω von $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Frequenz $f \neq$ Kreisfrequenz ω

Fourierreihe

- f ist ein Vektor im Hilbertraum H der T-periodischen, (abschnittsweise) stetig differenzierbaren Funktionen
- die Funktionen $\{\cos(k\omega x), \sin(k\omega x)\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ bilden ein vONS (vollständiges Orthonormalsystem) in H

Fourierreihe

- Es existiert eine Darstellung von f derart:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right)$$

mit

$$a_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(x) \cdot \cos(k\omega x) dx \ ,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(x) \cdot \sin(k\omega x) dx$$

- Anschaulich: $a_k \hat{=}$ wie gut passt der cos() zu $f(x)$

Fourierreihe

- Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{5}(x \bmod 10)$$

$$T = 10$$

$$a_k = \frac{1}{5}\int_0^{10} \frac{1}{5} x \cos(k\frac{\pi}{5}x)dx \underset{P.I.}{=} 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{1}{5}\int_0^{10} \frac{1}{5} x \sin(k\frac{\pi}{5}x)dx \underset{P.I.}{=} -\frac{2}{k\pi} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

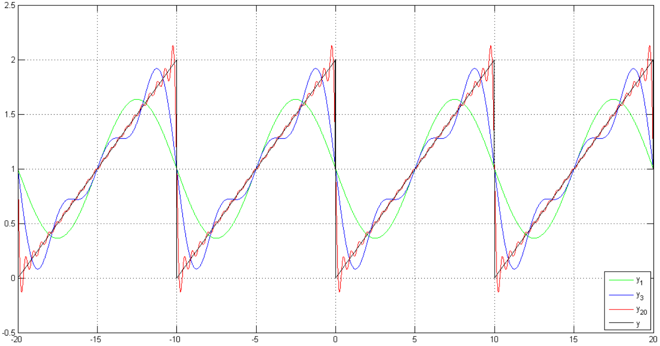
$$a_0 = \frac{1}{5}\int_0^{10} \frac{1}{5} x dx = 2$$

Fourierreihe

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{5}x\right)\right)$$

- *n*-te Partialsumme

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{5}x\right)\right)$$



Fourierreihe

- Mit komplexen Zahlen viel schöner zu rechnen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

mit

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{c}^{c+T} f(x) e^{-ik\omega x}$$

- e-funktion deutlich einfacher zu integrieren

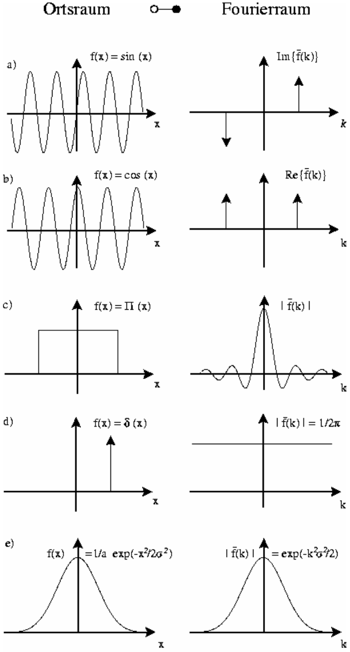
Fourier-Transformation

- Fourierreihe nur für periodische Funktionen
- Umgehung mit einem Trick
- $T \to \infty$
-
  - $k\omega$ wird kontinuierlich
  - Summen werden zu Integralen

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

- $\hat{f}(\omega)$ ist die Fouriertransformierte von $f(x)$
- einige Beispiele:

Fourier-Transformation



Fourier-Transformation

- inverse Fourier-Transformation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

- einfaches Ableiten, da

$$f'(x) \qquad \leftrightarrow \qquad i\omega\hat{f}(\omega)$$

- hilfreich beim Lösen von Differentialgleichung

Diskrete Fourier-Transformation

- Digitale Signale nicht kontinuiertlich: Sampels, Pixel,...
- Integrale werden wieder zu Summen
- Für ein Set (ein Vektor) aus mit N komplexen "Messwerten"gilt dann

$$\hat{a}_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \cdot \frac{jk}{N}} \cdot a_j$$

- Frequenzinformation f nicht direkt enthalten da auch keine Samplingrat SR angegeben

$$f(k) = SR \cdot \frac{k}{N}$$

- Abtasttheorem

$$SR > 2 f_{max}$$

Diskrete Fourier-Transformation

- 1. Beispiel: Freiwillige vor

Diskrete Fourier-Transformation

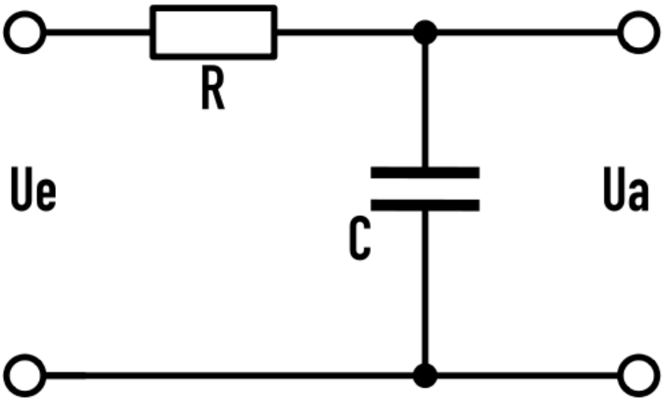
- inverse Diskrete Fourier-Transformation

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \cdot \frac{jk}{N}} \cdot \hat{a}_j$$

- Verlustfreies hin und her Transformieren

Diskrete Fourier-Transformation

- 2. Beispiel: Tiefpassfilter



Diskrete Fourier-Transformation

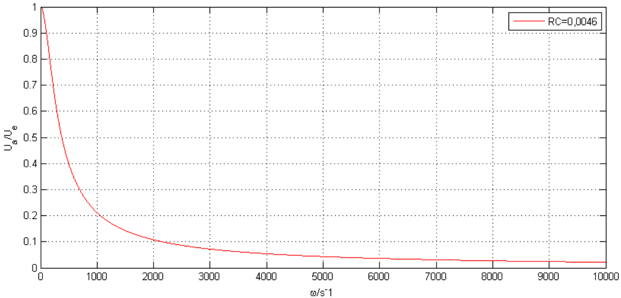
- Spannungsteiler mit komplexen Widerständen Z

$$U_a = U_e \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$

$$Z_R = R \qquad\qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

- Einsetzten und nach $\frac{U_a}{U_e}$ auflösen

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + i\omega CR}$$



Diskrete Fourier-Transformation

- Filter Simulieren:
- Audiodaten fouriertransformieren
- Transformierte mit $\frac{U_a}{U_e}(\omega)$ multiplizieren
- Transformierte rücktransformieren

Arduino

- Rechnung für Diskrete Fourier-Transformation aufwendig: N^2 Mult. und Add.
- besserer Algorithmus: FFT und iFFT
- (invers) fast Fourier transform
- oft schon vorimplimentiert
- leider nicht auf Arduino

End of Line